

Verifica intermedia delle conoscenze acquisite di¹
Analisi Matematica I
Marzo 2024

Esercizio n. 1 (Numeri complessi).

Determinare i seguenti insiemi:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z^3 - 6iz^2 - 12z + 10i = 0\},$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} : iz^2 + (1 - i)z - 1 - i = 0\},$$

$$C = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = \Re z, \Re \frac{z+2}{z-7} = 1 - \Im \frac{z+5}{z-7}\right\}.$$

Esercizio n. 2 (Successioni di numeri reali).

Stabilire quali delle seguenti successioni è convergente:

$$(a) \left\{ \frac{\sqrt[3]{(1-n)^4(2n^2-6n+5)} + \sqrt[3]{(1-n)^4(2n-2n^2-1)}}{3-2n} \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}},$$

$$(b) \left\{ \frac{\sqrt[n]{(3n)!}}{n^3} \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}, \quad (c) \left\{ \sqrt{2}n \left[\left(2 + \frac{3}{n}\right)^{3/2} - 2\sqrt{2} \right] \right\}_{n \geq 1}.$$

Esercizio n. 3 (Serie di numeri reali).

Studiare il comportamento delle seguenti serie numeriche:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{-\cos \frac{1}{n}}, \quad (b) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(n-4)!}{(n-4)^{n-4}},$$

$$(c) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n} \log \log n)^3}.$$

Esercizio n. 4 (Limiti di una funzione).

Senza usare i teoremi di de l'Hôpital, calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + 3^{1/x}}{4 + 3^{1/x}}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi 2^x)}{x(2^x - 1)}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x + \cos x - 2}{\sin^3 x - 2x}.$$

¹Fornire spiegazioni esaurienti alle soluzioni date.

Esercizio n. 5 (Derivabilità di una funzione e punti di estremo locale).

(A) Sia $f(x) = \arccos g(x)$. Determinare le espressioni di $f'(x)$, $f''(x)$ mediante $g(x)$, $g'(x)$ e $g''(x)$.

(B) In (A) porre

$$g(x) = \sqrt[3]{16x^2 - 8x + 1} .$$

Dopo aver determinato il dominio della funzione $f(x)$ così ottenuta, verificare se essa ha punti di non derivabilità e, usando l'espressione di $f'(x)$ trovata in (A), stabilire i punti di estremo locale e la monotonia di $f(x)$.